Сумма всех натуральных чисел как геометрическая прогрессия

Продолжение: еще пирамиды,

еще прогрессии

Основной вывод:

Можно показать, что сумма всех натуральных чисел есть сумма бесконечной геометрической прогрессии; такую прогрессию можно получить для разных множителей, однако сумма всегда получается равной -1/8.

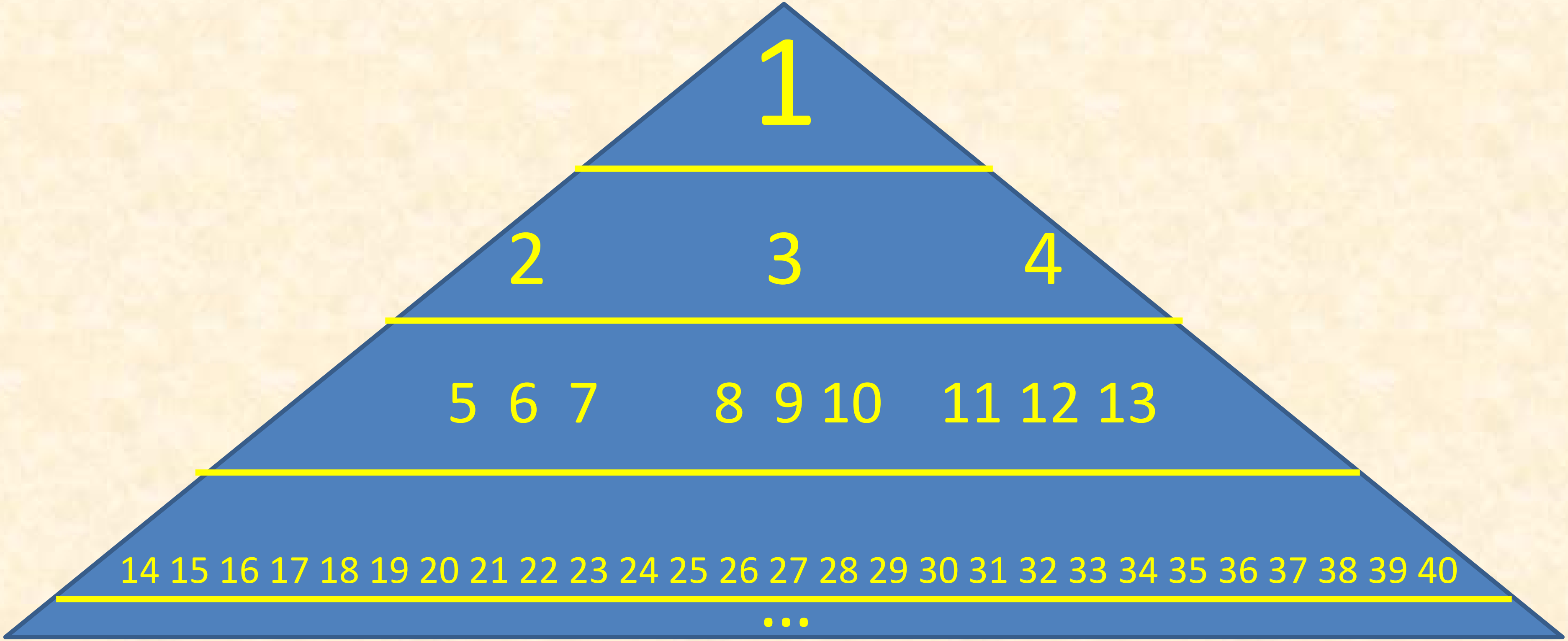
Основное содержание:

1) Вспоминаем «пирамиду утроения» из предыдущего видео и составляем похожие пирамиды для других чисел (5, 7, 9…).

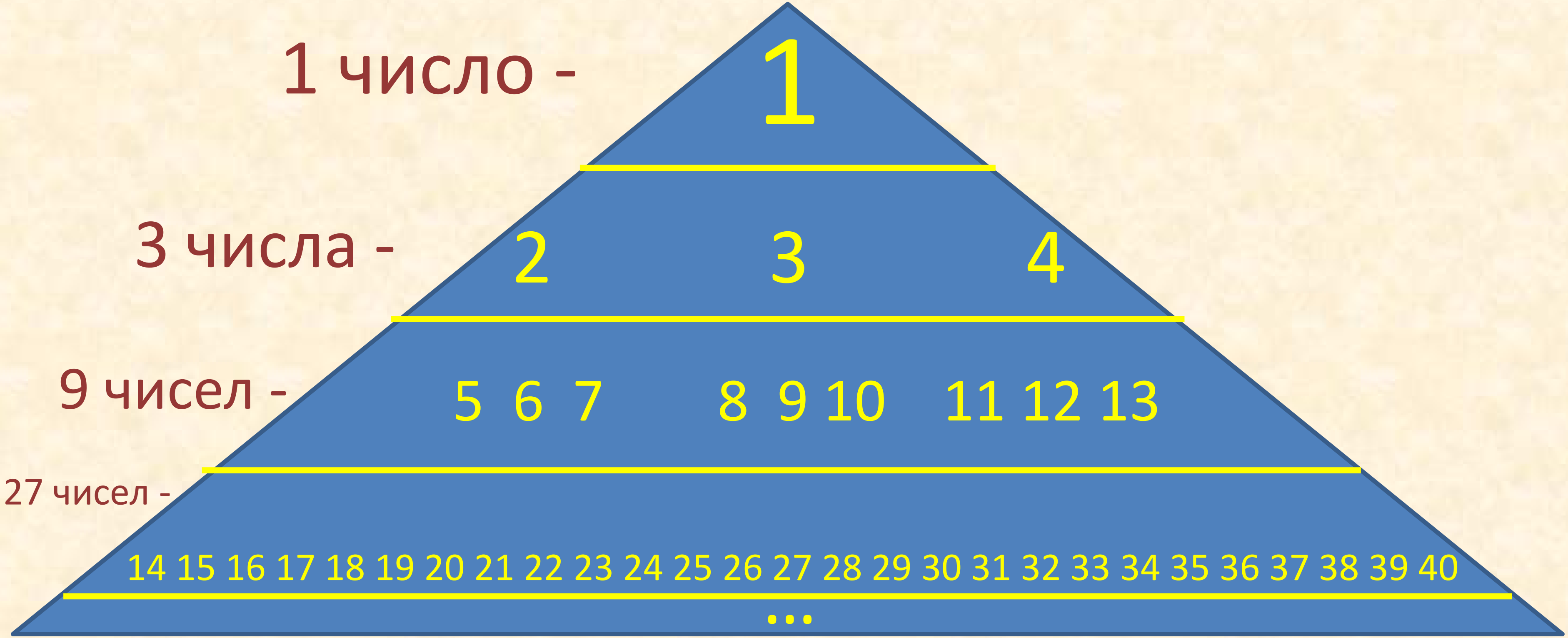
2) Демонстрируем формулы для общего случая такой «пирамиды» – геометрической прогрессии.

3) Находим сумму по формуле для бесконечной геометрической прогрессии для рассмотренных примеров и в общем виде.

Все натуральные числа можно представить в виде пирамиды



На каждом следующем уровне – в 3 раза больше чисел



и так далее... 81, 243, 729,..

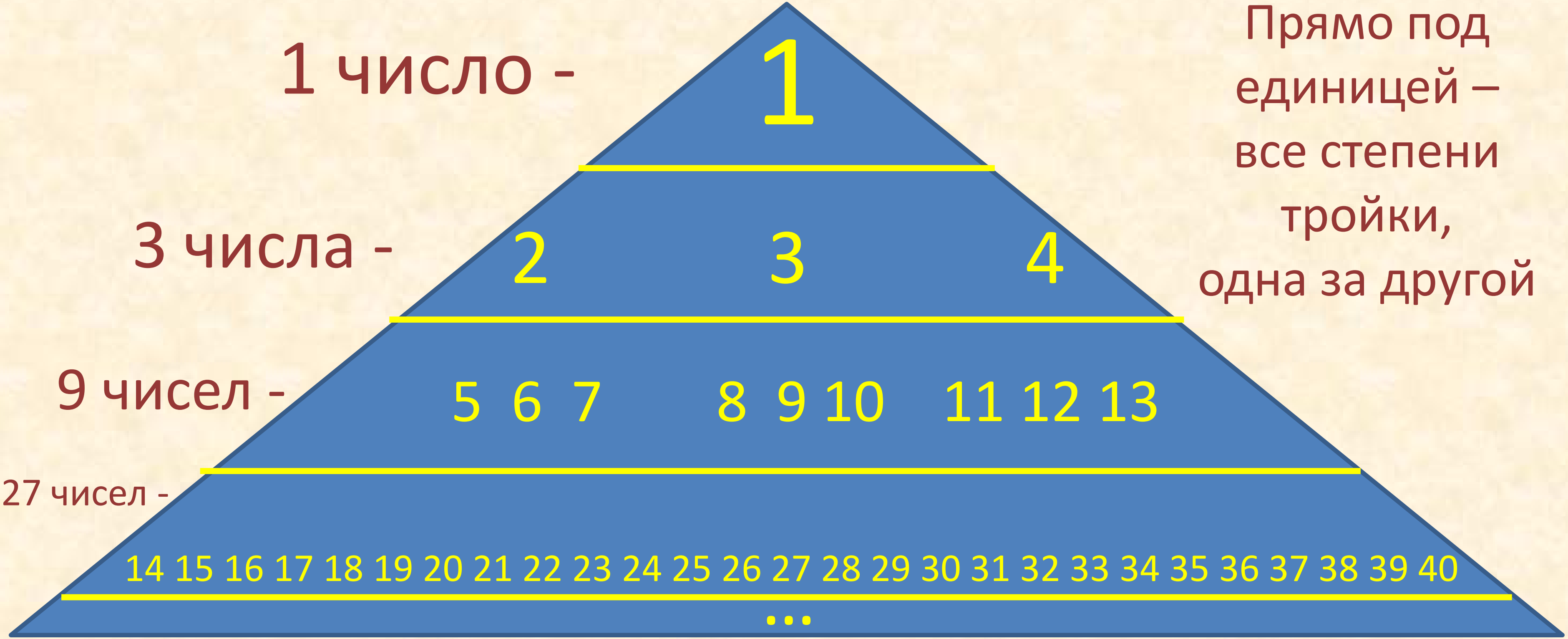
Прямо под каждым числом – число в 3 раза больше

1 число -

3 числа -

9 чисел -

27 чисел -



Прямо под единицей – все степени тройки, одна за другой

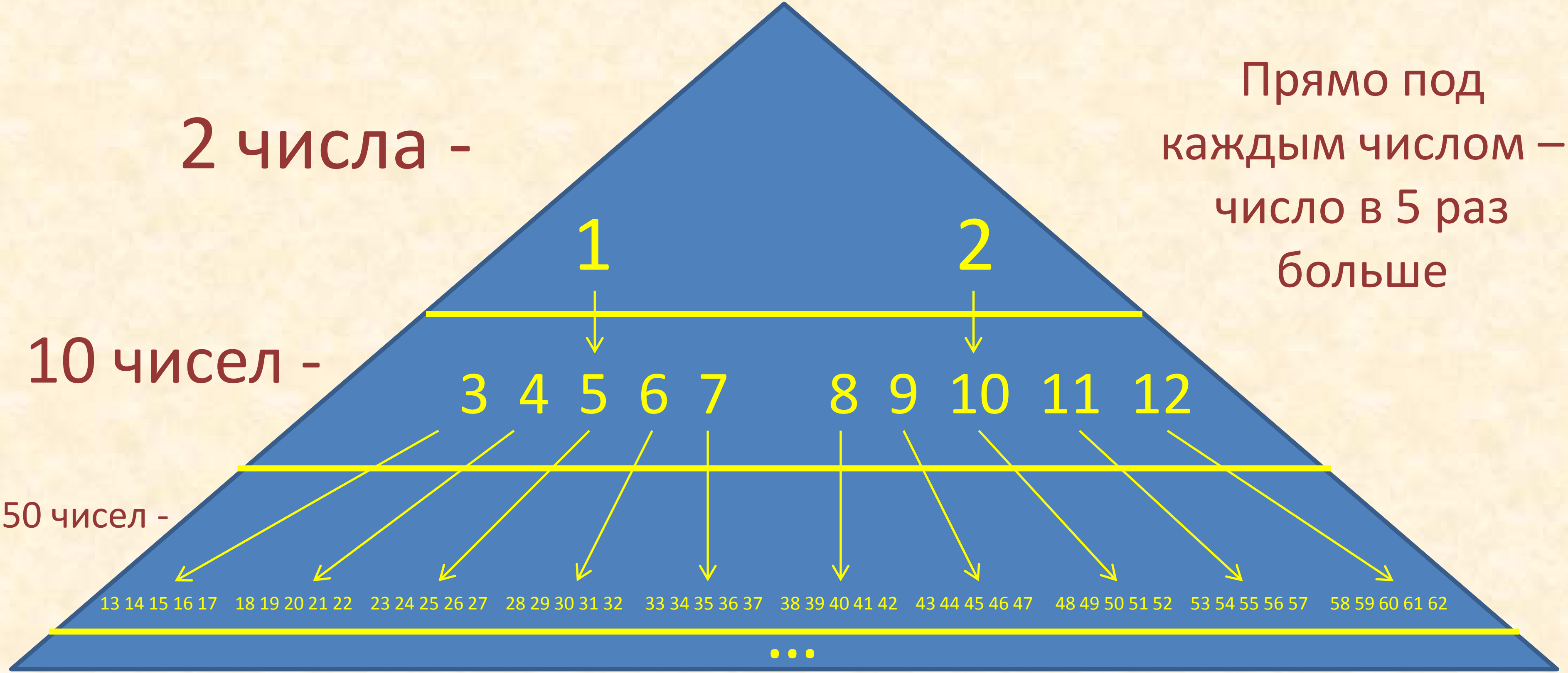
и так далее… 81, 243, 729,…

Для начала возьмем 2 числа
и на каждом следующем уровне – в 5 раз больше

2 числа -

10 чисел -

50 чисел -



Прямо под каждым числом – число в 5 раз больше

0-й уровень, чисел: $5^0 \times 2 = 2$ числа	$1+2$	сумма чисел: $S = 5^0 \times 3 = 3$
1-й уровень, чисел: $5^1 \times 2 = 10$	$3 + \ldots + 12$	сумма чисел: $S = 5^2 \times 3 = 75$
2-й , чисел: $5^2 \times 2 = 50$ чисел	$13 + \ldots + 62$	сумма: $S = 5^4 \times 3 = 1875$
3-й : $5^3 \times 2 = 250$ чисел	$63 + 64 + \ldots + 311 + 312$	$S = 5^6 \times 3 = 246875$
4-й : $5^4 \times 2 = 1250$	$313 + 314 + \ldots + 1561 + 1562$	$S = 5^8 \times 3 = 1171875$
степени 5-ки x 2	и так далее…	степени 25-и x 3
m-й : $5^m \times 2$	$\frac{5^m + 1}{2} + \ldots + 5^m + \ldots + 2 \times 5^m + \ldots + \frac{5^{m+1} - 1}{2}$	$S = 5^{2m} \times 3$
	…	

0-й уровень, чисел: 5^0 x 2 = 2 числа — $1+2$ — сумма чисел: $S = 5^0$ x 3 = 3

1-й уровень, чисел: 5^1 x 2 = 10 — $3 + \ldots + 12$ — сумма чисел: $S = 5^2$ x 3 = 75

2-й , чисел: 5^2 x 2= 50 чисел — $13 + \quad \ldots \quad + 62$ — сумма: $S = 5^4$ x 3 = 1875

3-й : 5^3 x 2 = 250 чисел — $63 + 64 + \quad \ldots \quad + 311 + 312$ — $S = 5^6$ x 3 = 246875

4-й : 5^4 x 2 = 1250 — $313 + 314 + \quad \ldots \quad + 1561 + 1562$ — $S = 5^8$ x 3 = 1171875

степени 5-ки x 2 — и так далее… — степени 25-и x 3

m-й : 5^m x 2 — $\dfrac{5^m + 1}{2} + \ldots + 5^m + \ldots + 2 \times 5^m + \ldots + \dfrac{5^{m+1} - 1}{2}$ — $S = 5^{2m}$ x 3

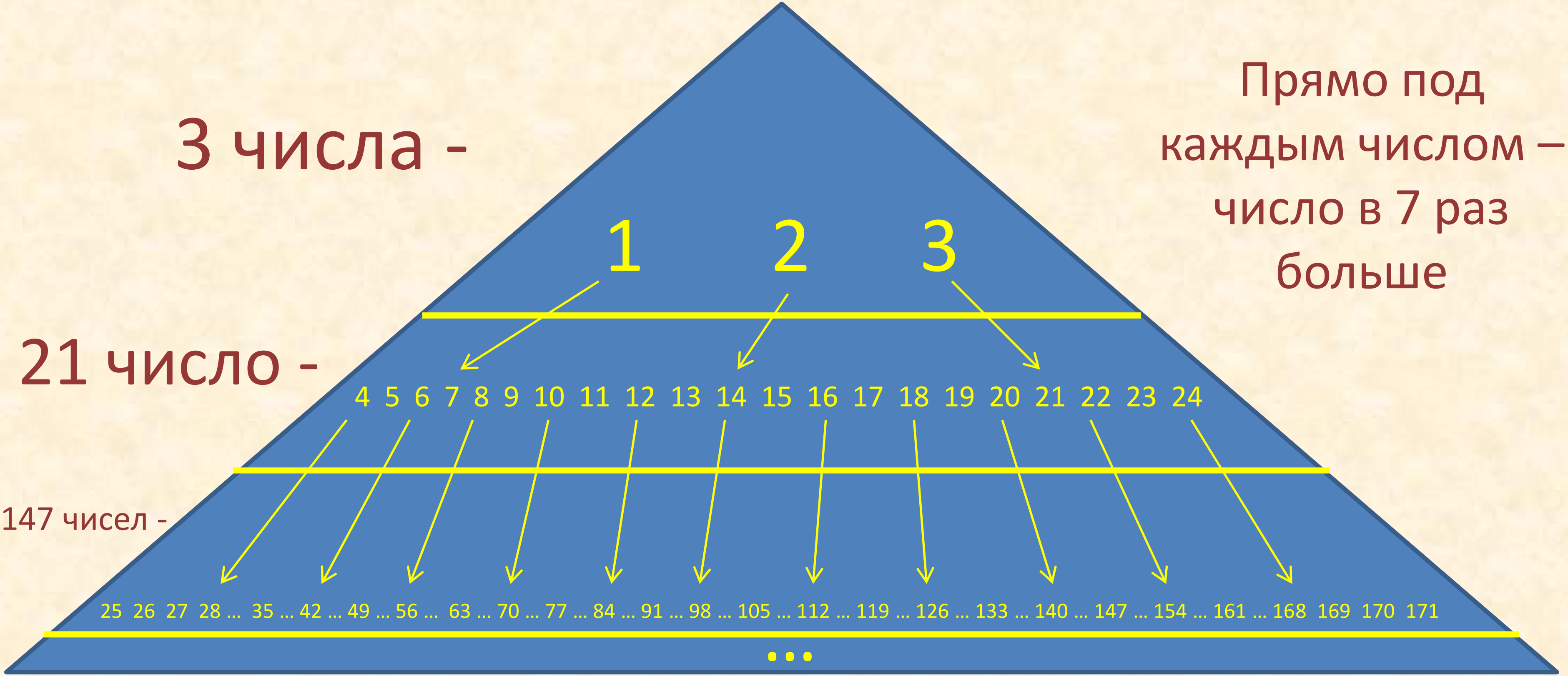
Итак, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3$

Возьмем теперь 3 числа
и на каждом следующем уровне – в 7 раз больше

3 числа -

21 число -

147 чисел -



Прямо под каждым числом – число в 7 раз больше

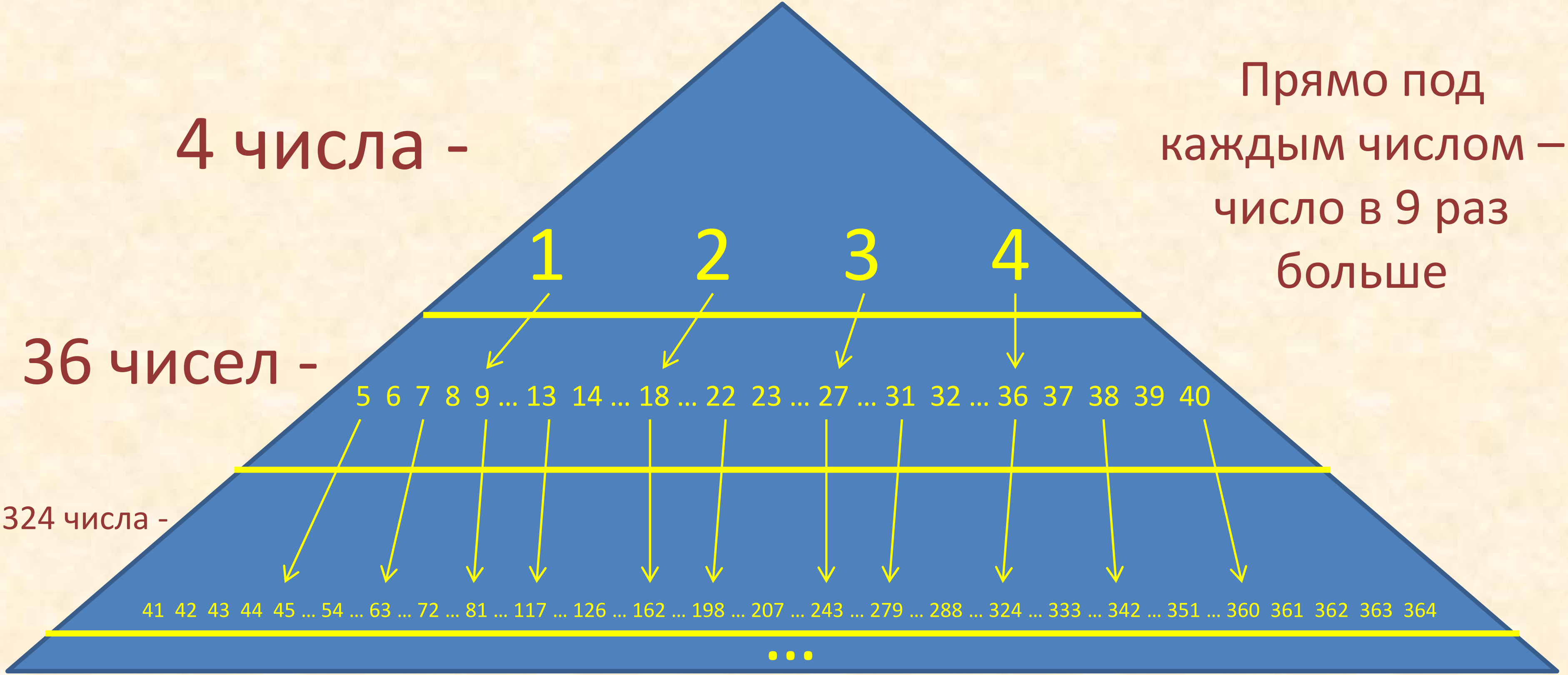
0-й уровень, чисел: 7^0 x 3 = 3 числа	1+2+3	сумма чисел: S = 7^0 x 6 = 6
1-й уровень, чисел: 7^1 x 3 = 21	4 + … + 24	сумма чисел: S = 7^2 x 6 = 294
2-й , чисел: 7^2 x 3 = 98 чисел	25 + … + 171	сумма: S = 7^4 x 6 = 14406
3-й : 7^3 x 3 = 686 чисел	172 + 173 +…+ 1199 + 1200	S = 7^6 x 6 = 705894
4-й : 7^4 x 3 = 7203	1201 + 1202 + … + 8402 + 8403	S = 7^8 x 6 = 34588806
степени 7-ки x 3	и так далее…	степени 49-и x 6
m-й : 7^m x 3	$\frac{7^m + 1}{2}$ +…+7^m+…+2x7^m+…+ 3x7^m+…+ $\frac{7^{m+1} - 1}{2}$	S = 7^{2m} x 6
	…	

0-й уровень, чисел: $7^0 \times 3 = 3$ числа	1+2+3	сумма чисел: $S = 7^0 \times 6 = 6$
1-й уровень, чисел: $7^1 \times 3 = 21$	4 + … + 24	сумма чисел: $S = 7^2 \times 6 = 294$
2-й , чисел: $7^2 \times 3 = 98$ чисел	25 + … + 171	сумма: $S = 7^4 \times 6 = 14406$
3-й : $7^3 \times 3 = 686$ чисел	172 + 173 +…+ 1199 + 1200	$S = 7^6 \times 6 = 705894$
4-й : $7^4 \times 3 = 7203$	1201 + 1202 + … + 8402 + 8403	$S = 7^8 \times 6 = 34588806$
степени 7-ки x 3	и так далее…	степени 49-и x 6
m-й : $7^m \times 3$	$\frac{7^m + 1}{2} + \ldots + 7^m + \ldots + 2 \times 7^m + \ldots + 3 \times 7^m + \ldots + \frac{7^{m+1} - 1}{2}$	$S = 7^{2m} \times 6$

Итак, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6$

Возьмем 4 числа
и на каждом следующем уровне – в 9 раз больше

Прямо под каждым числом – число в 9 раз больше

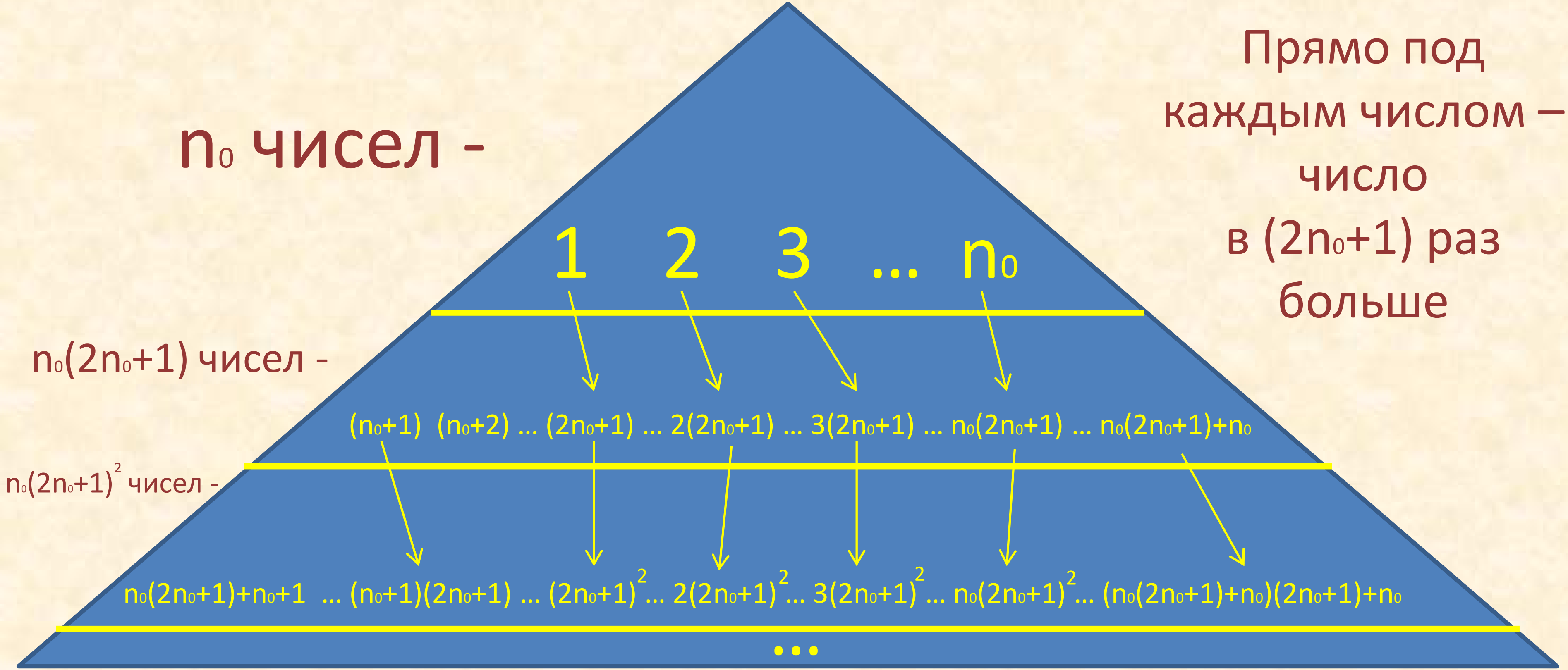


0-й уровень, чисел: $9^{0} \times 4 = 4$ числа	**1+2+3+4**	сумма чисел: $S = 9^{0} \times 10 = 10$
1-й уровень, чисел: $9^{1} \times 4 = 36$	**5 + … + 40**	сумма чисел: $S = 9^{2} \times 10 = 810$
2-й : $9^{2} \times 4 = 324$ чисел	**41 + … + 364**	сумма: $S = 9^{4} \times 10 = 65610$
3-й : $9^{3} \times 4 = 2916$ чисел	**365 + 366 +…+ 3279 + 3280**	$S = 9^{6} \times 10 = 5314410$
4-й : $9^{4} \times 4 = 26244$	**3281 + 3282 + … + 29523 + 29524**	$S = 9^{8} \times 10 = 430467210$
Степени 9-ки x 4	и так далее…	степени 81-го x 10
m-й : $9^{m} \times 4$	$\frac{9^{m}+1}{2} + \ldots + 9^{m} + \ldots + 2 \times 9^{m} + \ldots + 3 \times 9^{m} + \ldots + \ldots + 4 \times 9^{m} + \ldots + \frac{9^{m+1}-1}{2}$	$S = 9^{2m} \times 10$
	…	

0-й уровень, чисел: $9^{0} \text{ x } 4 = 4$ числа	1+2+3+4	сумма чисел: $S = 9^{0} \text{ x } 10 = 10$
1-й уровень, чисел: $9^{1} \text{ x } 4 = 36$	5 + … + 40	сумма чисел: $S = 9^{2} \text{ x } 10 = 810$
2-й : $9^{2} \text{ x } 4 = 324$ чисел	41 + … + 364	сумма: $S = 9^{4} \text{ x } 10 = 65610$
3-й : $9^{3} \text{ x } 4 = 2916$ чисел	365 + 366 +…+ 3279 + 3280	$S = 9^{6} \text{ x } 10 = 5314410$
4-й : $9^{4} \text{ x } 4 = 26244$	3281 + 3282 + … + 29523 + 29524	$S = 9^{8} \text{ x } 10 = 430467210$
Степени 9-ки x 4	и так далее…	степени 81-го x 10
m-й : $9^{m} \text{ x } 4$	$\frac{9^{m}+1}{2} + \ldots + 9^{m} + \ldots + 2\text{x}9^{m} + \ldots + 3\text{x}9^{m} + \ldots + \ldots + 4\text{x}9^{m} + \ldots + \frac{9^{m+1}-1}{2}$	$S = 9^{2m} \text{ x } 10$

Итак, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots = (1 + 81^{1} + 81^{2} + 81^{3} + 81^{4} + \ldots + 81^{m} + \ldots) \text{ x } 10$

Возьмем n_0 чисел и на каждом следующем уровне – в $(2n_0 + 1)$ раз больше



Прямо под каждым числом – число в $(2n_0+1)$ раз больше

0-й уровень, чисел: $(2n_0+1)^0 \times n_0$ — $1+2+\ldots+n_0$ — сумма: $S = (2n_0+1)^0 \times n_0(n_0+1)/2$

1-й уровень, чисел: $(2n_0+1)^1 \times n_0$ — $(n_0+1) + \ldots$ — сумма: $S = (2n_0+1)^2 \times n_0(n_0+1)/2$

2-й, чисел: $(2n_0+1)^2 \times n_0$ — $(n_0+1)(2n_0+1)-n_0 + \ldots$ — $S = (2n_0+1)^4 \times n_0(n_0+1)/2$

3-й, чисел: $(2n_0+1)^3 \times n_0$ — $(n_0+1)(2n_0+1)-n_0)(2n_0+1)-n_0 + \ldots$ — $S = (2n_0+1)^6 \times n_0(n_0+1)/2$

4-й: $(2n_0+1)^4 \times n_0$ — $[(n_0+1)(2n_0+1)-n_0)(2n_0+1)-n_0](2n_0+1)-n_0 + \ldots$ — $S = (2n_0+1)^8 \times n_0(n_0+1)/2$

n_0 x степени $(2n_0+1)$ — и так далее… — $n_0(n_0+1)/2$ x степени $(2n_0+1)^2$

m-й : $(2n_0+1)^m \times n_0$ — $\dfrac{(2n_0+1)^m + 1}{2} + \ldots + \dfrac{(2n_0+1)^{m+1} - 1}{2}$ — $S = (2n_0+1)^{2m} \times n_0(n_0+1)/2$

…

0-й уровень, чисел: $(2n_0+1)^0 \times n_0$ — $1+2+\ldots+n_0$ — сумма: $S = (2n_0+1)^0 \times n_0(n_0+1)/2$

1-й уровень, чисел: $(2n_0+1)^1 \times n_0$ — $(n_0+1) + \ldots$ — сумма: $S = (2n_0+1)^2 \times n_0(n_0+1)/2$

2-й, чисел: $(2n_0+1)^2 \times n_0$ — $(n_0+1)(2n_0+1)-n_0 + \ldots$ — $S = (2n_0+1)^4 \times n_0(n_0+1)/2$

3-й, чисел: $(2n_0+1)^3 \times n_0$ — $(n_0+1)(2n_0+1)-n_0)(2n_0+1)-n_0 + \ldots$ — $S = (2n_0+1)^6 \times n_0(n_0+1)/2$

4-й: $(2n_0+1)^4 \times n_0$ — $[(n_0+1)(2n_0+1)-n_0)(2n_0+1)-n_0](2n_0+1)-n_0 + \ldots$ — $S = (2n_0+1)^8 \times n_0(n_0+1)/2$

n_0 х степени $(2n_0+1)$ — и так далее… — $n_0(n_0+1)/2$ х степени $(2n_0+1)^2$

m-й : $(2n_0+1)^m \times n_0$ — $$\frac{(2n_0+1)^m + 1}{2} + \ldots + \frac{(2n_0+1)^{m+1} - 1}{2}$$ — $S = (2n_0+1)^{2m} \times n_0(n_0+1)/2$

Итак, $1+2+3+4+5+ \ldots = [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2$

Итак,

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$ $\quad$ *$n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$*

$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 =$ $\quad$ *$n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$*

$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 =$ $\quad$ *$n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$*

$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 =$ $\quad$ *$n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$*

…

$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2.$

Формула: $\quad 1 / (1 - q) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots$

$b_1 / (1 - q) = (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots) \times b_1$

Итак,

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$ $\quad$ *$n_0 = 1$, $q = 9$, $b_1 = 1$*

$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$ $\quad$ *$n_0 = 2$, $q = 25$, $b_1 = 3$*

$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 =$ $\quad$ *$n_0 = 3$, $q = 49$, $b_1 = 6$*

$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 =$ $\quad$ *$n_0 = 4$, $q = 81$, $b_1 = 10$*

…

$q = (2n_0+1)^2$, $b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2.$

Формула: $\quad 1 / (1 - q) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots$

$b_1 / (1 - q) = (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots) \times b_1$

Итак,

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$ $\qquad$ *$n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$*

$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$ $\qquad$ *$n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$*

$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49)$ $\qquad$ *$n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$*

$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 =$ $\qquad$ *$n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$*

…

$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2.$

Формула: $\qquad 1 / (1 - q) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots$

$b_1 / (1 - q) = (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots) \times b_1$

Итак,

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$ $\quad$ *$n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$*

$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$ $\quad$ *$n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$*

$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49)$ $\quad$ *$n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$*

$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81)$ $\quad$ *$n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$*

…

$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2.$

Формула: $\quad 1 / (1 - q) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots$

$b_1 / (1 - q) = (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots) \times b_1$

Итак,

$1 + 2 + 3 + 4 + \dots\ = \ 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 \ + 9^5 \ + \dots + 9^m + \ \dots =$ *$n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$*

$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \dots + 25^m + \dots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$ *$n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$*

$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \dots + 49^m + \dots) \times 6 = 6 / (1 - 49)$ *$n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$*

$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \dots + 81^m + \dots) \times 10 = 10 / (1 - 81)$ *$n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$*

…

$q = (2n_0 + 1)^2,\ b_1 = n_0(n_0 + 1)/2$

$= [1 + (2n_0 + 1)^2 + (2n_0 + 1)^4 + \dots + (2n_0 + 1)^{2m} + \dots\ ] \times n_0(n_0 + 1)/2.$

$b_1 / (1 - q) = (1 + q \ + q^2 + q^3 + q^4 \ + q^5 + \dots + q^m + \ \dots) \times b_1$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$$ *$n_0 = 1$, $q = 9$, $b_1 = 1$*

$$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$$ *$n_0 = 2$, $q = 25$, $b_1 = 3$*

$$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49)$$ *$n_0 = 3$, $q = 49$, $b_1 = 6$*

$$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81)$$ *$n_0 = 4$, $q = 81$, $b_1 = 10$*

…

$q = (2n_0+1)^2$, $b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2 =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1)^2)] =$$

$$b_1 / (1 - q) = (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots) \times b_1$$

Итак,

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$ $\quad$ *$n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$*

$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$ $\quad$ *$n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$*

$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49)$ $\quad$ *$n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$*

$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81)$ $\quad$ *$n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$*

…

$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2 =$

$= n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1)^2)] = n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1))(1 + (2n_0+1))] =$

$b_1 / (1 - q) = (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^m + \ldots) \times b_1$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$$ *$n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$*

$$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$$ *$n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$*

$$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49)$$ *$n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$*

$$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81)$$ *$n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$*

…

$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2 =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1)^2)] = n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1))(1 + (2n_0+1))] =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(-2n_0)(2 + 2n_0)] =$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots = \qquad n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$$

$$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25) \qquad n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$$

$$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49) \qquad n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$$

$$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81) \qquad n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$$

…

$$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$$

$$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2 =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1)^2)] = n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1))(1 + (2n_0+1))] =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(-2n_0)(2 + 2n_0)] = n_0(n_0+1)/[2 \times (-2) \times 2 \times n_0(n_0+1)] =$$

Итак,

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$ *$n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$*

$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$ *$n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$*

$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49)$ *$n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$*

$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81)$ *$n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$*

…

$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2 =$

$= n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1)^2)] = n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1))(1 + (2n_0+1))] =$

$= n_0(n_0+1)/[2(-2n_0)(2 + 2n_0)] = \cancel{n}_0(n_0+1)/[2\times(-2)\times 2\times n_0(n_0+1)] =$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$$

$n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$

$$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$$

$n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$

$$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49)$$

$n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$

$$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81)$$

$n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$

…

$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2 =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1)^2)] = n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1))(1 + (2n_0+1))] =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(-2n_0)(2 + 2n_0)] = \cancel{n}_0(n_0+1)/[2\text{x}(-2)\text{x}2\text{x}\cancel{n}_0(n_0+1)] =$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots = \qquad n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$$

$$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25) \qquad n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$$

$$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49) \qquad n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$$

$$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81) \qquad n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$$

…

$$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$$

$$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2 =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1)^2)] = n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1))(1 + (2n_0+1))] =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(-2n_0)(2 + 2n_0)] = \cancel{n_0}(\cancel{n_0+1})/[2\times(-2)\times2\times\cancel{n_0}(n_0+1)] =$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots =$$ $n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$

$$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25)$$ $n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$

$$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49)$$ $n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$

$$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81)$$ $n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$

…

$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$

$$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2 =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1)^2)] = n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1))(1 + (2n_0+1))] =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(-2n_0)(2 + 2n_0)] = \cancel{n_0}(\cancel{n_0+1})/[2 \times (-2) \times 2 \times \cancel{n_0}(\cancel{n_0+1})] =$$

Итак,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = 1 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + \ldots + 9^m + \ldots = \qquad n_0 = 1,\ q = 9,\ b_1 = 1$$

$$= (1 + 25^1 + 25^2 + 25^3 + 25^4 + \ldots + 25^m + \ldots) \times 3 = 3 / (1 - 25) \qquad n_0 = 2,\ q = 25,\ b_1 = 3$$

$$= (1 + 49^1 + 49^2 + 49^3 + 49^4 + \ldots + 49^m + \ldots) \times 6 = 6 / (1 - 49) \qquad n_0 = 3,\ q = 49,\ b_1 = 6$$

$$= (1 + 81^1 + 81^2 + 81^3 + 81^4 + \ldots + 81^m + \ldots) \times 10 = 10 / (1 - 81) \qquad n_0 = 4,\ q = 81,\ b_1 = 10$$

…

$$q = (2n_0+1)^2,\ b_1 = n_0(n_0+1)/2$$

$$= [1 + (2n_0+1)^2 + (2n_0+1)^4 + \ldots + (2n_0+1)^{2m} + \ldots] \times n_0(n_0+1)/2 =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1)^2)] = n_0(n_0+1)/[2(1 - (2n_0+1))(1 + (2n_0+1))] =$$

$$= n_0(n_0+1)/[2(-2n_0)(2 + 2n_0)] = \cancel{n_0(n_0+1)}/[2\times(-2)\times2\times\cancel{n_0(n_0+1)}] = -1/8$$

Вопросы:

1) Почему мы уверены, что с «пирамидой» в общем случае все получится именно так, как в наших формулах?

Об этом в следующих видео.

2) Можно ли каким-нибудь еще способом придти к тому же результату с суммой всех натуральных чисел (-1/8)?

Да, можно.

3) Что дальше?

Очевидно, надо будет показать, как получены формулы для «пирамиды» в общем случае, и какими еще способами можно получить нашу сумму.